

文章编号: 1002-8055(2009)11-2397-06

恒热流斜板自然对流边界层的稳定性研究

陶建军, 熊向明

(北京大学 工学院 湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871)

摘 要: 对恒热流条件下的斜板自然对流边界层的稳定性进行了分析及数值模拟. 研究发现在一定的倾角和 Prandtl 数范围内, 三维波可存在两种不稳定模态, 其临界频率分别接近于重力内波和二维 T2S(Tolmien-Schlichting) 波的频率. 更为特殊的是, 在适当条件下该三维波模态可比二维 T2S 波更不稳定. 这一看似违反 Squire 定理的结果是由于控制方程中的浮力项造成的. 数值模拟初步验证了三维波的临界特性. 由于稳定性总是同层流至湍流的转捩过程密切相关, 计算结果可为高效换热翅片的设计提供理论依据.

关 键 词: 边界层; 稳定性; 自然对流; 数值模拟

中图分类号: O357.4+1

文献标识码: A

Instabilities of boundary layers along a tilt plate dissipating uniform heat flux

TAO Jianjun, XIONG Xiangming

(State Key Laboratory of Turbulence and Complex System, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The stabilities of natural convection boundary layers along a tilt uniform heat flux plate were studied theoretically and numerically. For some Prandtl numbers, three-dimensional instability may have two critical modes, whose critical frequencies are close to the internal wave frequency and the value of two-dimensional T2S (Tolmien-Schlichting) wave, respectively. Specially, at proper tilt angles the three-dimensional wave mode is more unstable than the two-dimensional T2S wave. This result that seems contradict with the Squire Theorem is caused by the additional buoyancy terms in the governing equations. Direct numerical simulations confirmed the critical properties of the three-dimensional waves. Since hydrodynamic instability always exists at the first stage of turbulence transition process, current results may provide theoretical basis for optimal design of fins with high heat transfer efficiency.

Key words: boundary layer; stability; natural convection; numerical simulation

由内热源引起的自然对流广泛存在于与空天动力系统相关的工业过程中, 如金属薄片退火及回火过程、高负荷微电子元件冷却等等. 尽管自然对流的换热效率较低, 但由于其过程不需额外能耗, 如强迫对流所需的风机耗能, 且结构简单可靠、易维护、低噪声等特点, 在热工控制过程中仍被大量采用.

实际工程换热元件是多种多样的, 人们多采用简化的模型来研究强化传热的机制, 模型之一为容器的内置翅片, 其相关研究近年来受到了越来越多的重视. 对方腔内置加热翅片的研究发现, 翅片的竖直放置比水平放置可提高换热效率 20%^[1]. 最近人们对边壁存在温差的方腔内倾斜放置的加热翅片板引起的热对流进行了数值研

收稿日期: 2008-12-31; 修订日期: 2009-07-29

基金项目: 国家自然科学基金(10672003)

作者简介: 陶建军(1970-), 男, 山东济南人, 副教授, 博士, 研究方向: 热对流、流动稳定性与转捩.

究,发现翅片倾角对换热有重要影响^[2].对倾斜矩形腔内竖直放置的加热翅片情况的研究发现,平均 Nusselt 数并不随倾角单调变化,而是存在一极大值.以往的研究还对腔体壁面的温度条件的影响进行了数值模拟^[34].总之,人们对内置翅片换热的研究取得了许多进展,但多为数值模拟,且主要针对层流状态.对强化换热机理尚缺乏相应的理论分析.

沉浸于流体中的垂直或倾斜加热板(翅片)会在壁面形成热对流边界层,它对换热效果起着决定性的作用.当腔体的竖直或倾斜壁面之间存在温差时会在腔内形成自然对流,并在腔体的中部形成垂直方向的温度梯度^[36],此时若在腔体内竖直放置翅片则其边界层必然会受到该温度梯度的影响.众所周知,湍流的换热效率比层流高,而湍流的出现总是以流场的失稳为先导的.因此,研究斜板热对流边界层的稳定性对设计高效换热翅片有重要意义,这也是本文研究内容的出发点.

1 物理模型

对于上下壁面为绝热壁的方腔,若对其左右壁面分别加热和冷却且热流率相同,则在很大的 Rayleigh 数范围内,对流仅存在于近壁处,而在中央则是垂直温度分层的静止流体区. Prandtl^[7]最先研究了热分层流中恒热流斜板自然对流边界层问题并给出了基本流解,壁面热流恒定和平行流是该解的主要特征.在本文中我们称其为 Prandtl 边界层(如图 1 所示)并对其进行稳定性分析.其中斜板与水平面成 γ 角.对基本流而言,边界层外(腔体中部)流体和壁面的温度 $T_1^*(s^*)$ 及 $T_w^*(s^*)$ 在竖直方向上是线性变化的,即 $T_1^*(s^*) = T_1^*(0) +$

$N^* s^*, T_w^*(s^*) = T_w^*(0) + N^* s^*$. 其中 s^* 是沿重力加速度 g 的反方向的距离, N^* 是温度梯度.因此基本流的壁面与边界层外流体的温差为常数 $\$T^* = T_w^*(s^*) - T_1^*(s^*) > 0$. 坐标轴 x^* 和 y^* 分别平行和垂直于壁面,而 z^* 沿展向方向.下标 $/0$ 和上标 $/*$ 分别表示边界层外的量和有量纲量.

在 Boussinesq 近似下的控制方程为

$$\begin{cases} \frac{5V^*}{5S^*} + V^* \# \dot{y} V^* = - \dot{y} (p^* / Q) - \\ \qquad \qquad \qquad g Q (T^* - T_1^*) + M^2 V^* \\ \frac{5T^*}{5S^*} + V^* \# \dot{y} T^* = J \dot{y}^2 T^* \\ \dot{y} \# V^* = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 Q, M, J, C 分别是温度为 $T_1^*(0)$ 时的参考流体密度、运动黏性系数、热扩散率和热膨胀系数.在下面的讨论中所用的无量纲长度、时间和温度定义如下:

$$(X, Y, Z) = \frac{(x^*, y^*, z^*)}{d}, S = \frac{S^* M}{d^2},$$
$$T = \frac{T^* - T_1^*}{\$T^*}, d = \left(\frac{4M}{g C \sin^2(\gamma) N^*} \right)^{1/4}.$$

本问题的无量纲参数为 Grashof 数和 Prandtl 数

$$Gr = \frac{g C \sin(\gamma) \$T^* d^3}{M}, Pr = \frac{M}{J}.$$

流场中的无量纲变量可分解为

$$U = U_0 + u, V = V_0 + v, W = w, T = H + H$$

其中 u, v, w 和 H 为扰动量, U_0, V_0 和 H 组成了无扰动的基本流的解. Prandtl^[7]发现基本流是平行流且壁面热流恒定,速度和温度分别为

$$U_0 = \frac{Gr}{2} e^{-Y} \sin Y, V_0 = 0, H = e^{-Y} \cos Y \tag{2}$$

由于边界层外流体的密度在竖直方向上是线性变化的,重力内波的 Brun2Vais3/4 频率为 $N_B = [- (g / Q) (dQ ds^*)]^{1/2} = (g C N^*)^{1/2}$, 其无量纲形式为 $N = \frac{2}{\sin \gamma} Pr^{-1/2}$.

2 稳定性理论及数值方法

在下面的稳定性分析中,所引入的无穷小扰动按斜涡形式可以表示为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{iA}{k^2} 5c(Y) + 7(Y) \\ 5(Y) \\ \frac{iB}{k^2} 5c(Y) - \frac{A}{B} 7(Y) \\ ((Y) \end{Bmatrix} e^{i(KX + LZ - \omega t)} \tag{3}$$

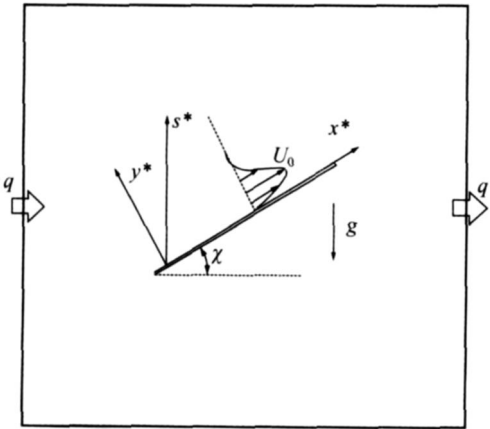


图 1 倾斜的自然对流边界层的示意图.
Fig. 1 Schematic setup of a tilt thermal boundary layer

其中 $k^2 = A^2 + B^2$. 由稳定性理论所得的扰动的控制方程为

$$\begin{cases} \frac{B^2}{k^2} U_{c0} 5 + (iAU_0 - iX) 7 = 7d - k^2 7 + Gr \frac{B^2}{k^2} (\\ (5d - k^2 5) (iAU_0 - iX) - iAU_0 d 5 = \\ 5c\hat{E} - 2k^2 5d + k^4 5 - iAGr (c - k^2 Gr \cot(V)) (\\ (d - k^2 (-i(AU_0 - X) Pr = \\ \frac{4}{Gr} \left[\frac{iA}{k^2} 5c + 7 + \cot(V) 5 \right] + Pr H 5 \end{cases} \quad (4)$$

其边界条件为

$$7(0) = 5c(0) = 5(0) = (c(0) = 7(\cdot) = 5c(\cdot) = 5(\cdot) = ((\cdot) = 0 \quad (5)$$

其中上标 c_0 表示 d/dY . 流向和展向波数 A 和 B 取正实数. 频率 (X) 的虚部为时间增长率, 其值为零时相应扰动处于中性状态. 注意到在壁面处扰动温度梯度取为零, 对应于总温度场的恒热流边界条件. 稳定性问题式 (4) 和式 (5) 可化为一个 8 阶微分方程, 含有 8 个边界条件. 可以用 4 阶 Runge-Kutta 法求解, 具体方法参见 Iyer 的文章^[8].

为了验证分析结果, 我们对边界层进行了直接数值模拟. 三维不可压 Navier-Stokes 方程在均匀网格上采用有限差分格式的 Projection 法求解. 压力的 Poisson 方程采用多重网格方法求解. 流向和展向采用周期边界条件, 壁面处采用无滑移边界条件. 扰动温度在壁面的法向导数为零, 即包含扰动的总温度场在壁面的热流是恒定的. 在远场设扰动速度和扰动温度沿法向按指数衰减, 衰减系数由稳定性分析给出. 计算区域在流向和展向取所要计算的三维波的波长, 计算表明在法向上取 $Y_{\max} = 81.56$ 已足够用来模拟不稳定模式的特征. 初始扰动取方程 (4) 的解乘以一系数来使得扰动速度的振幅在 $O(10^{-3})$. 计算采用的最密网格为 $128 \times 80 \times 32$. 具体计算方法详见文献^[9].

3 分析与讨论

对沉浸于热分层流体中的自然对流斜板边界层, Iyer^[8] 最早研究了壁温不变 $((\cdot) = 0)$ 条件下的稳定性, 发现在其所用参数范围内二维 T2S 波总是最不稳定的, 因而随后的边界层研究多是对 T2S 波, 此前还没有对恒热流条件下的斜板边界层进行过稳定性的理论分析和数值模拟.

其实在工程应用和实验中难以严格保证壁温不随时间变化, 且在电子器件冷却中较为恒定的器件的散热功率, 这更接近与恒热流的边界条件.

在倾角 $V = 55^\circ$ 及流场处于中性稳定状态时, 波数空间的 Grashof 数及频率的等值线如图 2 所示. 由图 2(a), (b) 和图 2(e), (f) 可得 T2S 波的临界参数 (Gr, A, B, X) 在 $Pr = 0.172$ 时为 $(681.9, 0.1485, 0, 51.107)$; 在 $Pr = 0.12$ 时为 $(241.17, 0.1327, 0, 111.214)$. 显然, 小 Prandtl 数的流体, 其 T2S 波有更高的临界 Grashof 数, 因而更稳定. 一个更有趣的结果是: 图 2(c), (g) 显示存在三维波的临界不稳定模态.

三维波模态的临界参数 (Gr, A, B, X) 在 $Pr = 0.172$ 时为 $(1011.867, 0.10626, 0.145, 21.953)$, 在 $Pr = 0.12$ 时为 $(2001.85, 0.1042, 0.1386, 51.364)$. 因此, 在 $Pr = 0.12$ 时三维波模态的临界 Grashof 数比 T2S 波的还小. 这一结果初看起来与 Squire 定理相悖, 其实这是因为控制方程 (4) 中的浮力项的存在, 使得 Squire 变换不再适用. 另一需要注意的结果是: 在 $Pr = 0.172$ 和 $Pr = 0.12$ 时三维波模态的临界频率分别接近于无量纲的 Brun2 Vais44 频率 21.877 和 51.459, 这一结果说明该模态同重力内波存在某种内在联系, 需更深一步的研究. 通过以上分析我们认为, 在 $V = 55^\circ$ 时, 对于小 Prandtl 数流体的恒热流斜板边界层, 最不稳定的模态是三维波, 而非二维 T2S 波.

图 2(e) 中右上角的鞍点说明可能存在另外一个或第二、三维波模态的临界点. 图 3(a) 为在 $V = 55^\circ$, $Pr = 0.12$ 时的中性状态的 Gr 等值线图. 较黑的等值线表示较小的 Gr . 由于对应于较大 Gr 值的模态更加稳定, 因此较高 Gr 值区域的等值线没有画出. 图 3(b) 为 $V = 55^\circ$ 时二维 T2S 波的中性曲线. 粗实线和实线分别表示 $Pr = 0.12$ 时边界条件为 $(c(0) = 0)$ 和 $((\cdot) = 0)$ 的结果. 虚线表示 $Pr = 0.172$ 、边界条件为 $((\cdot) = 0)$ 时的中性曲线. 图 3(a) 中可以找到这一个新的 Grashof 数的极小值, 其对应的参数为 $(Gr, A, B, X) = (232, 0.1502, 0.1327, 111.514)$, 即第二模态的临界 Gr 值高于图 2(g) 中所示的第一模态的值. 两种三维波的另一个不同点在于, 第二模态的频率 111.514 高于重力内波的频率 51.459, 但接近临界 T2S 波的频率 111.214. 如图 3(b) 所示, 在 T2S 波的中性曲线(粗实线)上有两个极小值, 流向波数较大的极小值对

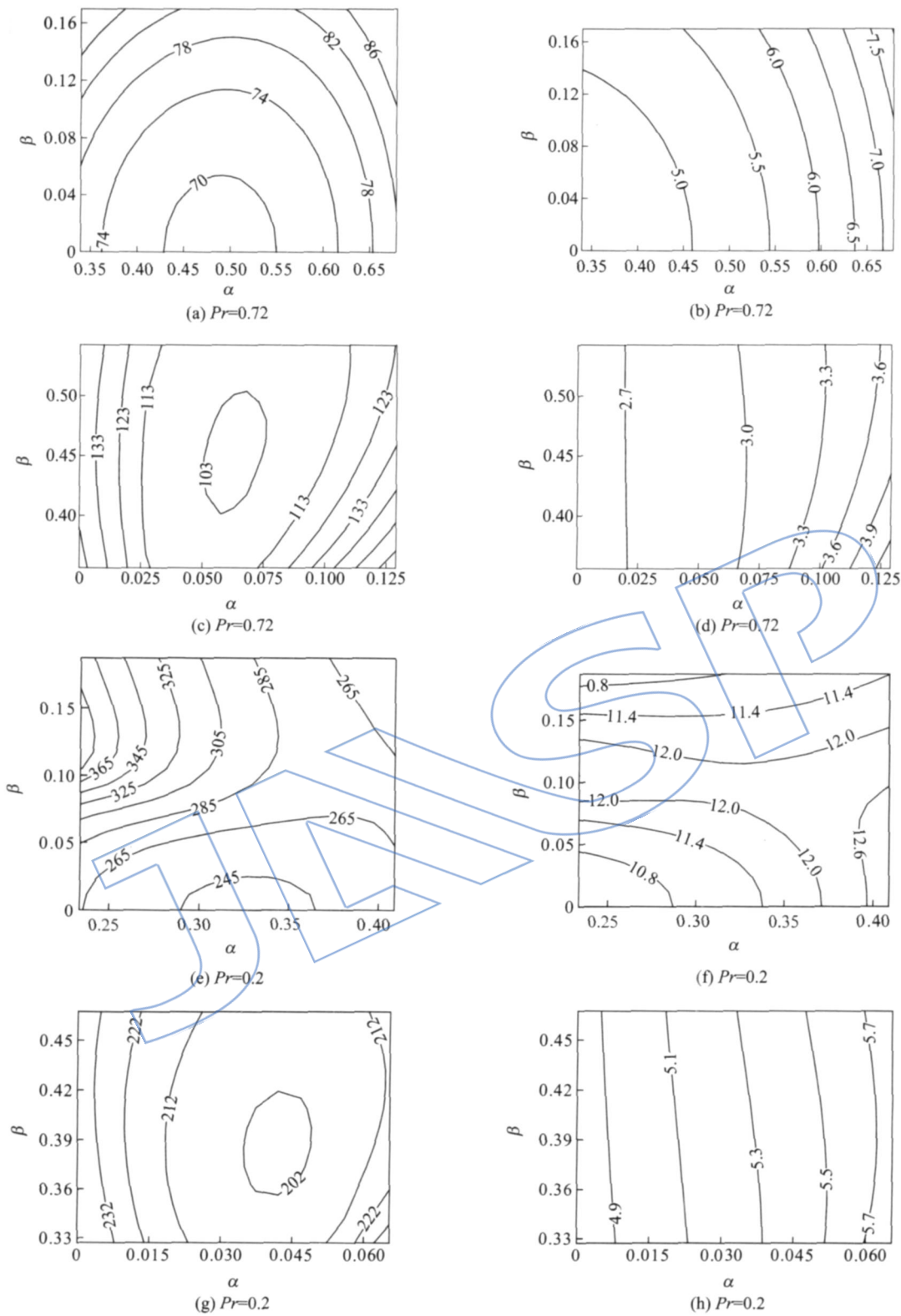


图 2 $V=55b$ 及中性状态下, Gr (图(a), (c), (e), (g))和相应的频率 X (图(b), (d), (f), (h)) 的等值线图.

Fig. 2 Is α contours of the Gr ((a), (c), (e), (g)) and the corresponding frequencies

X (b), (d), (f), (h)) at $V=55b$ and neutral states.

应于 Gr 等值线图(图 3(a))中的一个鞍点,在 $A=0.64$ 处.作为参照,在 $((0)=0$ 时二维 T2S 波的中性曲线也在图 3(b)中给出,在 $Pr=0.72$ 和 $Pr=$

0.2 时的临界参数 (Gr , A , B , X) 分别为 (1361 4, 0.416, 0, 71 245) 和 (2031 66, 0.608, 0, 111 492). 因此,在倾角 $V=55b$ 时,相对于扰动壁温不变的情

况, 恒热流边界条件使得二维 T2S 波在 $Pr=0.172$ 时更加不稳定; 但却在 $Pr=0.2$ 时更加稳定. 两种温度边界条件的另一不同影响是: 在 $((0)=0$ 条件下, $Pr=0.172$ 和 0.2 的二维 T2S 波的中性曲线上都只有一个极小值(如图 3(b)所示), 而且在它们相应的 Gr 等值线图中也找不到临界第二、三维波模态. 另外, 我们在恒热流边界条件下的分析表明, 在 $V=55b$ 时, 只有当 $0.15 < Pr < 0.134$ 时才存在第二、三维波不稳定模态, 而且对于小 Prandtl 数的流体来说, 第二模态随着倾斜角的增大而变得越来越重要. 比如说, 对于 $Pr=0.2$ 的流体, 当 $V=62.2b$ 时, 第二、三维波模态成为最不稳定的模态.

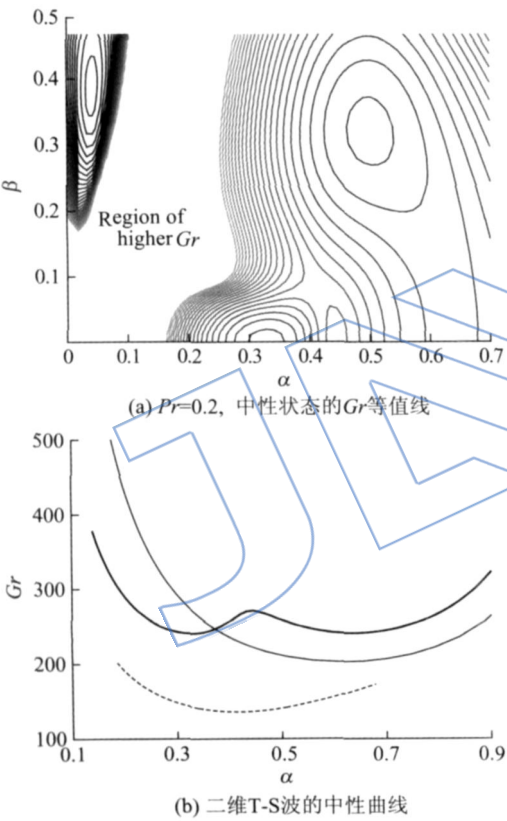


图 3 $V=55b$ 时中性状态的 Gr 等值线和二维 T2S 波的中性曲线

Fig. 3 Contours of the Gr and neutral curves of T2S waves at $V=55b$

为验证稳定性分析结果, 我们对最不稳定的三维波模态的时间演化进行了直接数值模拟. 在 $V=55b$, $Pr=0.2$ 时, 第一模态的临界参数(Gr, A, B, X) 分别为 $(2001.85, 0.042, 0.1386, 51.364)$. 三维波第一模态在 $(X, Y, Z) = (741.8, 11.28, 81.14)$ 处流向扰动速度 u 的时间序列及其功率谱见图 4.

功率谱计算所用区间为 $51.99 < S < 66.75$. 计算参数为 $A=0.042$, $B=0.1386$ 和 $Gr=2191.4$. 如图 4 (a) 所示, 在 Grashof 数略大于临界值时边界层会失稳, 初始引入的小幅值三维波扰动会随时间增长. 在其线性增长阶段 ($51.99 < S < 66.75$) 测得的波动频率为 51.38 , 这与临界频率相对误差小于 2% (图 4 (b)). 扰动速度场和温度场如图 5 所示. 注意到扰动温度等值线在近壁处垂直于壁面, 这是由恒热流边界条件所决定的. 图 5 为流向扰动速度 u (图 5 (a), (b)) 和扰动温度 H (图 5 (c), (d)) 在 $S=431.6$ 时的等值线. 虚线代表负值, 计算所用参数见图 4. 另外, 由图 5 可看出三维波第一模态的流向波长比展向波长大了近一个量级. 系列的数值模拟所得的临界 Grashof 数同理论预测值的误差在 5% 以内, 这证实了三维波模态的存在, 但其时空演化机制仍需要进一步的数值和实验研究.

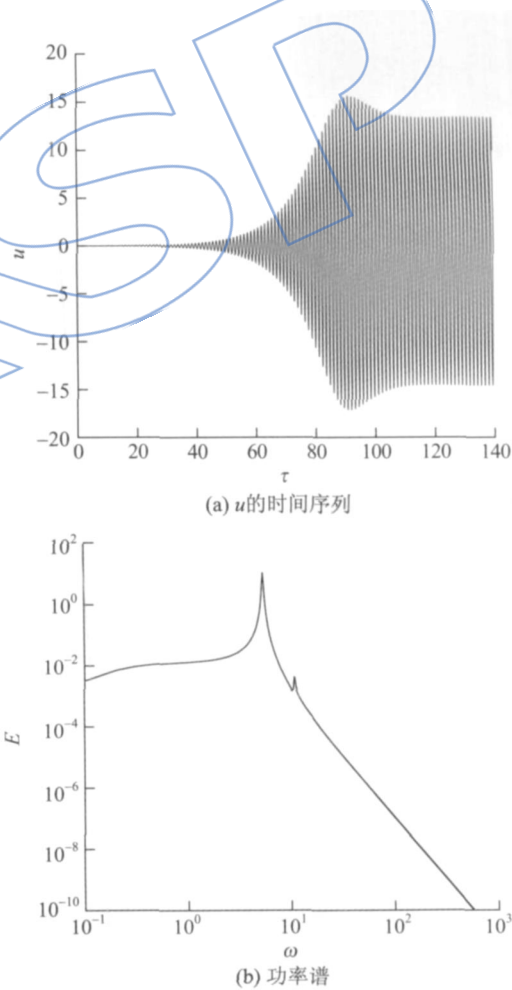


图 4 三维波第一模态流向扰动速度 u 的时间序列及其功率谱

Fig. 4 Disturbing streamwise velocity u as a function of time for the first mode of the three-dimensional wave and power spectrum

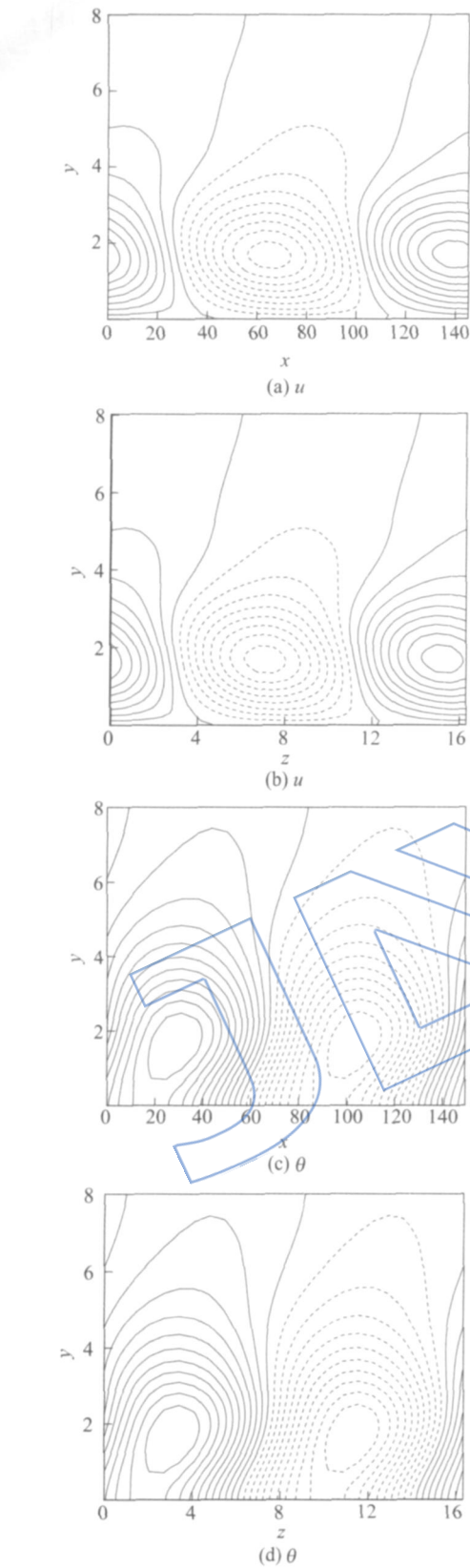


图 5 流向扰动速度 u 和扰动温度 H 在 $S=431.6$ 时的等值线

Fig. 5 Isocontours of disturbing streamwise velocity u and disturbing temperature H at $S=431.6$.

4 结 论

1) 对恒温流边界条件的该类斜板边界层进行了理论分析与数值模拟,发现三维波模态具有与二维 T2S 波完全独立的临界参数.

2) 通过研究斜板倾角及流体 Prandtl 数对这种三维波不稳定性的影响,发现该三维波在适当条件下可比二维 T2S 波更不稳定,从而会对边界层的失稳及转捩产生重要影响.

3) 该三维波不稳定性可存在两个模态,其临界波数和临界频率差别很大.文中对两模态共存的参数范围也进行了分析.

4) 壁面的温度条件对稳定性有着重要影响,而影响效果同流体的物性(Prandtl 数) 密切相关.比如壁温固定转化为热流恒定的条件时,二维 T2S 波在 $Pr=0.72$ 的边界层中会更加不稳定,而在 $Pr=0.2$ 的边界层中变得更加稳定.

5) 数值模拟证实了理论所预测的三维波模态,并初步验证了其临界特性.

致谢:

对同德国拜鲁伊特大学 F. H. Busse 教授的有益讨论表示感谢!

参考文献:

[1] Oztop H F, Dagtekin I, Bahoo A. Comparison of position of a heated thin plate located in a cavity for natural convection [J]. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 2004, 31: 1212-1221.

[2] Ben-Nakhi A, Chamkha A J. Effect of length and inclination of a thin fin on natural convection in a square enclosure [J]. Numerical Heat Transfer, 2006, 50(4): 3812-3911.

[3] Bilgen E. Natural convection in cavities with a thin fin on the hot wall [J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 2005, 48(17): 3493-3505.

[4] Oztop H, Bilgen E. Natural convection in differentially heated and partially divided square cavities with internal heat generation [J]. Int. J. Heat Fluid Flow, 2006, 27(3): 462-475.

[5] Tao J, Zhuang F. The absolute and convective instabilities of the natural convection in vertical heated slot [J]. Phys. Rev. E., 2000, 62(6): 7957-7960.

[6] Tao J, Le Quer P, Xin S. Absolute and convective instabilities of natural convection flow in boundary layer regime [J]. Phys. Rev. E., 2004, 70(6): 066311(7 pages).

[7] Prandtl L. Essentials of fluid dynamics [M]. New York: Hafner Pub. Co., 1952.

[8] Iyer P A. Instabilities in buoyancy driven boundary layer flows in a stably stratified medium [J]. Boundary Layer Meteorology, 1973, 5(122): 53-66.

[9] Tao J. Nonlinear global instability in buoyancy driven boundary layer flows [J]. J. Fluid Mech., 2006, 566: 372-388.